

**Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών**  
**Τμήμα Μαθηματικών**



**Μάθημα: Η Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος-  
Μαθηματικοποίηση**

**Υπεύθυνη καθηγήτρια: κ. Χρυσανγή Τριανταφύλλου**

**<< Επίλυση Μαθηματικού Περιβαλλοντικού Προβλήματος  
στην Σχολική Τάξη>>**

**Θέμα Εργασίας: Η Πράσινη Εποχή**

**Ευάγγελος Καλατζής (Αριθμός Μητρώου:1112202000072)**

**Φώτης Μπαλασίνας (Αριθμός Μητρώου:1112202000136)**

**Εξάμηνο: 7<sup>ο</sup>**

**Ακαδημαϊκό Έτος: 2023-2024**

**ΑΘΗΝΑ**

## **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ :**

1. Πρόλογος .....	σελ.1
2. Το πρόβλημα .....	σελ.2
2.1 Ενδεικτική Λύση του προβλήματος.....	σελ.4
3. Σχεδιασμός προβλήματος .....	σελ.6
4. Το περιβαλλοντικό φύσης ζήτημα.....	σελ.7
5. Το πλαίσιο της διδασκαλίας.....	σελ.8
6. Βιβλιογραφία.....	σελ.9

## ***Πρόλογος***

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει ένα μαθηματικό πρόβλημα που αφορά ένα περιβαλλοντικής φύσης θέμα το οποίο σχετίζεται με κοινωνικό-επιστημονικό ζήτημα. Πιο συγκεκριμένα, αφορά την ενέργεια που καταναλώνει το κάθε νοικοκυριό αλλά και το οικολογικό αντίκτυπο που έχει όταν προέρχεται από μη ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, όπου αυτό γίνεται μέσα από ένα πραγματικό και αυθεντικό μαθηματικό πρόβλημα.

# Το Πρόβλημα

## Τίτλος: Η Πράσινη Εποχή

### Φωτοβολταϊκά εν δράση

Τα φύλλα δεδομένων των φωτοβολταϊκών μας παράγουν τις εξής πληροφορίες:

- Μέγιστη ισχύς  $P_{max}$  : η μέγιστη ισχύς των φωτοβολταϊκών
- Μέγιστη τάση τροφοδοσίας  $V_{max}$  (Maximum power point voltage)  
Η τάση όταν η ισχύς είναι μέγιστη.
- Ρεύμα μέγιστης ισχύς  $I_{max}$  (Maximum power point Current): Η ένταση όταν η ισχύς είναι μέγιστη.
- Η τάση ανοικτού κυκλώματος  $V_{oc}$  (Open circuit Voltage): Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων του φωτοβολταϊκού όταν αυτό δεν έχει συνδεθεί στο κύκλωμα.
- Ρεύμα βραχυκύκλωσης (Short circuit Current)  $I_{sc}$  : Η ένταση του ρεύματος όταν οι δύο πόλοι των φωτοβολταϊκών είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους και χωρίς καμία άλλη συσκευή.
- Απόδοση  $\alpha$  (efficiency) δηλαδή το ποσοστό της ηλιακής ακτινοβολίας που το φωτοβολταϊκό μπορεί να μετατρέψει σε ηλεκτρική ενέργεια.
- Διαστάσεις.
- Όλες οι μετρήσεις γίνονται κάτω από καθορισμένες συνθήκες ( Standard test Conditions):
  - ✓ Θερμοκρασία : 25°C
  - ✓ Ακτινοβολία φωτός :1000 w/m<sup>2</sup>
  - ✓ Air mass : 1,5 (δείκτης που εκφράζει την ποσότητα ατμόσφαιρας από την οποία η ηλιακή ακτινοβολία περνάει πριν φτάσει στο φωτοβολταϊκό).

Δίνεται το παρακάτω φύλλο δεδομένων για μονοκρυσταλλικά φωτοβολταϊκά διαφορετικών  $P_{max}$  .

$P_{max}$	545 W	
$V_{max}$	41,93 V	
$I_{max}$		19,39 A
$V_{oc}$	49,90 V	45,70 V
$I_{sc}$	13,92 A	13,99 A
$A$		21,48 %
Διαστάσεις	2279× 1134 mm	2094× 1134 mm

(Ο παραπάνω πίνακας περιέχει πραγματικά δεδομένα από φωτοβολταϊκά που κυκλοφορούν στην αγορά)

ΝΑ ΣΗΜΕΙΩΘΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΑ ΦΩΤΟΒΟΛΤΑΪΚΑ ΕΙΝΑΙ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΗΛΑΔΗ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΟΙΚΙΑΚΗ ΧΡΗΣΗ.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ:**

- 1) Συμπληρώστε τα κενά από το παραπάνω φύλλο δεδομένων.
- 2) Διαθέτουμε ένα μονοκρυσταλλικό φωτοβολταϊκό των 545 Watt. Πόσες ώρες κατά μέσο όρο υπάρχει ηλιοφάνεια στην περιοχή σου; Μπορείς να δώσεις μια εκτίμηση σε kwh για την ενέργεια που παράγεται από το φωτοβολταϊκό ετησίως.
- 3) Οι πραγματικές συνθήκες διαφέρουν από τις ιδανικές και διάφοροι παράγοντες (θερμοκρασία, σκιές, φθορά, σκόνη κ.α), μπορούν να κάνουν τα φωτοβολταϊκά να δώσουν ισχύ μικρότερη από την μέγιστη που αναγράφεται στο φύλλο δεδομένων. Γενικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε πραγματικές συνθήκες ένα φωτοβολταϊκό δίνει το 75% της μέγιστης ισχύς του. Χρησιμοποιήστε αυτό το δεδομένο για να ανανεώσετε την εκτίμηση σας στο προηγούμενο ερώτημα.
- 4) Βρείτε τους εκκαθαριστικούς λογαριασμούς του παρόχου σας για το τελευταίο έτος στο σπίτι σας. Υπολογίστε την ετήσια κατανάλωση. Ποιο το ποσοστό της ενέργειας που ξοδέψατε μπορούσε να καλυφθεί από το φωτοβολταϊκό των προηγούμενων ερωτημάτων; Πόσα χρήματα θα εξοικονομούσατε;
- 5) Δίνεται ότι το παραπάνω μονοκρυσταλλικό φωτοβολταϊκό κοστίζει 248 ΕΥΡΩ με κόστος εγκατάστασης 350 ΕΥΡΩ. Σε πόσα χρόνια αναμένεται να αποσβεστεί το κόστος της αγοράς του μονοκρυσταλλικού φωτοβολταϊκού; Θα προβαίνατε σε αυτή την αγορά; Αν ναι και γιατί;

## 2) ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- 1) Για αυτό το πρόβλημα θα χρειαστούμε δύο τύπους. Γνωρίζουμε ότι  $P = V \cdot I$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ότι  $P_{max} = V_{max} \cdot I_{max}$ . Η απόδοση είναι το ποσοστό % της ηλιακής ενέργειας που φτάνει στο φωτοβολταϊκό, η οποία μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια.

Κάτω από τις STC το φωτοβολταϊκό δέχεται ηλιακή ενέργεια  $1000 \frac{W}{m^2}$ .

Αν  $A$  η συνολική επιφάνεια του φωτοβολταϊκού, το φωτοβολταϊκό δέχεται συνολική ενέργεια ισχύς  $(1000 \frac{W}{m^2}) \times A$ .

Άρα έπεται ότι η απόδοση είναι  $\alpha = \frac{P_{max}}{(1000 \frac{W}{m^2})A} 100$

$$i) \quad \text{Έχουμε } I_{max} = \frac{P_{max}}{V_{max}} = \frac{545 W}{41,93 V} \cong 13,00 A$$

$$A = 2279 mm \cdot 1134 mm = 2279 \cdot 10^{-3} m$$

$$1134 \cdot 10^{-3} m = 2,584386 m^2$$

$$\alpha = \frac{595 W}{1000 \frac{W}{m^2} \cdot 2,584386 m^2} \cdot 100 = 81,09$$

$$ii) \quad A = 2094 mm \cdot 1134 mm = [2094 \cdot 10^{-3} m] \cdot [1134 \cdot 10^{-3} m] = 2,379596 m^2$$

$$P_{max} = \frac{a \left( 1000 \frac{W}{m^2} \right) \cdot A}{100} = \frac{21,48 [1000 \frac{W}{m^2}] \cdot 2,374596 m^2}{100} = 510,06 W$$

- 2) Έστω ότι στην περιοχή μου στο δήμο Αθηνών, έχει ηλιοφάνεια κατά μέσο όρο 5h την ημέρα. Οπότε η ενέργεια που παράγεται από το φωτοβολταϊκό σε μία μέρα είναι  $545 W \cdot 5h = 2.725 Wh = 2,725 kWh$

Ετησίως:  $2,725 \cdot 365 = 994,625 kWh$ .

**Υποσημείωση:** Στο συγκεκριμένο ερώτημα οι απαντήσεις διαφέρουν, καθώς εξαρτάται από το μέσο όρο της ηλιοφάνειας της κάθε περιφέρειας στην οποία υπάγεται η περιοχή του καθενός.

- 3) Πολλαπλασιάζουμε την απάντηση του ερωτήματος 2 με 0,75 για να λάβουμε μια πιο ρεαλιστική εκτίμηση:

$$0,75 \cdot 994,625 = 745,97 kWh$$

**Υποσημείωση:** Το συγκεκριμένο ερώτημα χρησιμοποιεί το προηγούμενο ερώτημα άρα πάλι οι απαντήσεις διαφέρουν.

- 4) Θεωρούμε ένα νοικοκυριό με ετήσια κατανάλωση: 1.324 kWh.

Το ποσοστό της ενέργειας που θα καλυπτόταν από το προηγούμενο φωτοβολταϊκό είναι

$$\frac{745,97}{5873} \cdot 100 = 12,70 \%$$

Γι' αυτή την κατανάλωση το νοικοκυριό πληρώνει ετησίως : 1.210,02 ΕΥΡΩ

Επομένως με αυτό το φωτοβολταϊκό το νοικοκυριό εξοικονομεί :

$$1.210,02 \cdot 12,70\% = 153,67 \text{ ευρώ ετησίως.}$$

**Υποσημείωση: Η απάντηση του ερωτήματος διαφέρει από σπίτι σε σπίτι, το συγκεκριμένο νοικοκυριό αποτελείται από 3 άτομα.**

5) Το συνολικό κόστος είναι  $248+350=598$  ευρώ

Έχουμε

$$\frac{598}{153,67} = 3,9 \text{ έτη}$$

Δηλαδή το κόστος αγοράς θα αποσβεστεί σε περίπου 3 χρόνια και 11 μήνες  
Θα προέβαινα στην αγορά του φωτοβολταϊκού, καθώς το κόστος αγοράς θα αποσβεστεί σε λιγότερο από 4 χρόνια. Συμφέρει την τσέπη του καταναλωτή και είναι φιλικό για το περιβάλλον.

**Υποσημείωση: Οι απαντήσεις θα διαφέρουν ανάλογα με τις απαντήσεις στα άλλα ερωτήματα. Επίσης ο κάθε μαθητής μπορεί να δικαιολογήσει με διαφορετικό τρόπο την αγορά ή μη αγορά του συγκεκριμένου φωτοβολταϊκού.**

### **3) Σχεδιασμός Προβλήματος**

Έμπνευση για το πρόβλημα αποτέλεσε το επίκαιρο θέμα της ηλεκτρικής κρίσης στην αγορά, αποτέλεσμα του πρόσφατου πολέμου στην Ουκρανία.

Η κρίση αυτή οδηγεί πολλούς ανθρώπους σε αναζήτηση νέων πηγών ενέργειας, φιλικότερων προς το περιβάλλον. Μια λύση είναι η αξιοποίηση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας όπως η ηλιακή.

Το πρόβλημα μας προέκυψε από περαιτέρω μελέτη του θέματος. Συγκεκριμένα, μελετήσαμε τους πίνακες ηλεκτρικών δεδομένων των φωτοβολταϊκών και είδαμε πως τα αναγραφόμενα στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον καταναλωτή προκειμένου να προσδιορίσει το κατά πόσο τον συμφέρει η αγορά ενός συγκεκριμένου φωτοβολταϊκού.

Στο πρόβλημα συμπεριλάβαμε ερωτήματα που στοχεύουν στην καλύτερη κατανόηση, από τον μαθητή, των εμπλεκόμενων εννοιών (ισχύς, απόδοση κ.τ.λ.). όλα τα ερωτήματα χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα και οδηγούν τον μαθητή σε μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν πραγματικά για την εκτίμηση της παραγόμενης ενέργειας ενός φωτοβολταϊκού.

Επιδιώξαμε το πρόβλημα να έχει έναν ανοιχτό και εξατομικευμένο χαρακτήρα ώστε να φαίνεται πιο οικείο στον μαθητή και να επιτευχθεί η ευαισθητοποίηση του γύρω από το περιβαλλοντικό θέμα που διαπραγματεύεται.

Η μεγαλύτερη πρόκληση που αντιμετωπίσαμε κατά τον σχεδιασμό αυτού του προβλήματος ήταν η κατανόηση των εμπλεκόμενων εννοιών και η παρουσίαση τους με τρόπο όσο το δυνατόν πιο συνοπτικό και κατανοητό για τον μαθητή. Επιπλέον, κληθήκαμε να βάλουμε τον μαθητή να αξιοποιήσει πραγματικά δεδομένα με σκοπό να έρθει αντιμέτωπος με ρεαλιστικές καταστάσεις, χωρίς όμως να χαθεί στην πολυπλοκότητα των πραγματικών προβλημάτων.



#### **4) ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΗΣ ΖΗΤΗΜΑ**

Το τέλος της δεύτερης χιλιετίας βρίσκει τη Γη και τους κατοίκους της απειλούμενους από μίαν ανάπτυξη χωρίς μέτρο που μήτε το φυσικό περιβάλλον σέβεται, αλλά και τις πραγματικές ανάγκες του ανθρώπου αλλοιώνει. Αν ληφθεί υπ' όψιν ότι, κατά την ίδια περίοδο, μεγάλες είναι οι κατακτήσεις της επιστήμης και ότι η πρόοδος της τεχνολογίας είναι ικανή να απαλλάξει το ανθρώπινο είδος από πολλά προβλήματα, η κατάληξη αυτή των πραγμάτων έχει δυσδιάκριτες τις ερμηνείες.

Το μέχρι σήμερα κυρίαρχο οικονομικό σύστημα στις βιομηχανικές χώρες, που βασίστηκε στην ανεξέλεγκτη ροή ορυκτών καυσίμων και πρώτων υλών, οδήγησε μεν στην υλική ευημερία της Δύσης, εις βάρος, όμως, του παγκόσμιου περιβάλλοντος και των τοπικών κοινωνιών. Έτσι, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με σημαντικότερα προβλήματα, όπως η πλανητική αλλαγή του κλίματος, η τρύπα του όζοντος, η εκτεταμένη ρύπανση του αέρα, των νερών και του εδάφους, η διαχείριση των αστικών και τοξικών αποβλήτων, η μείωση της βιοποικιλότητας, αλλά και η διεύρυνση των οικονομικών ανισοτήτων.

Γενικά, θα λέγαμε ότι λόγω της συνεχούς ρύπανσης του περιβάλλοντος αλλά και κατάχρησης του ήδη υπάρχοντος αποθέματος ενέργειας, οι καταναλωτικές ανάγκες απαίτησαν ένα άλλο μέσο που θα κάλυπτε της ενεργειακές ανάγκες σε πρώτη φάση και έπειτα θα παρήγαγε επιπλέον προϊόν προς εμπορική διάθεση στην αρμόδια εταιρία αγοράς και παροχής ρεύματος.

Αυτό που σίγουρα θα πρέπει να διερευνηθεί προκειμένου μάλιστα να αλλάξει, είναι η μη εξαίρεση από τους επενδυτικούς νόμους, των φωτοβολταϊκών συστημάτων, καθώς παρά το γεγονός ότι έχουν ένα καθόλου ευκαταφρόνητο κόστος εγκατάστασης, εντούτοις η παραγωγή ρεύματος προς διάθεση -πώληση παρέχει μεγάλα κέρδη.

Όσον αφορά τα φωτοβολταϊκά θα έχει παρατηρήσει κανείς ότι πρόκειται για συστήματα ανατροφοδοτούμενα, και ένα από τα κυριότερα θετικά χαρακτηριστικά είναι η άμεση ανταπόκριση τους και η σταδιακή αλλά ριζική απόσβεσή τους σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Εν κατακλείδι, η Ευρωπαϊκή Ένωση και οι άλλες χώρες θα πρέπει να ενημερώσουν τους πολίτες για το θέμα της πράσινης ανάπτυξης. Δίνοντας τους κίνητρα για την νέα στροφή προς τις Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας (Π.Α.Ε). Ωστόσο θα πρέπει να κατανοήσουμε πλήρως ότι η Ελλάδα πλέον έχει εισχωρήσει σε μια νέα εποχή όπου αυτή η εποχή είναι η πράσινη ανάπτυξη. Η Ελληνική Κυβέρνηση δίνει ευκαιρίες σε όλους τους πολίτες- καταναλωτές μέσω του προγράμματος «Φωτοβολταϊκά στη στέγη» να λάβουν μια επιχορήγηση προκειμένου να τοποθετήσουν τα φωτοβολταϊκά χωρίς να επιβαρυνθούν στο 100% της εγκατάστασης τους. Δίνοντας τους κίνητρο να προβούν σε νέες ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, όπου μία από αυτές είναι τα φωτοβολταϊκά.

### **5) Πλαίσιο Διδασκαλίας**

Το πρόβλημα διαπραγματεύεται έννοιες ηλεκτρισμού που διδάσκονται στο μάθημα της Φυσικής Γ' Γυμνασίου. Οι έννοιες αυτές συναντώνται κυρίως στο πρώτο ερώτημα ενώ τα υπόλοιπα ερωτήματα έχουν έναν πιο καθαρά μαθηματικό χαρακτήρα.

Τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν τα ποσοστά και άλλες απλές αλγεβρικές έννοιες που θεωρούμε διαχειρίσιμες από μαθητές Α' Γυμνασίου.

Ως εκ τούτου, το πρόβλημα μπορεί να διδαχθεί στην Γ' Γυμνασίου στο μάθημα των Μαθηματικών ή σε συνδιδασκαλία με τον εκπαιδευτικό που διδάσκει το μάθημα της Φυσικής. Θα μπορούσαμε ωστόσο να επιχειρήσουμε να το διδάξουμε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου με περαιτέρω ανάλυση των φυσικών όρων ή παράλειψη του πρώτου ερωτήματος.

Σκοπός μας είναι ο μαθητής να εξοικειωθεί με τα ποσοστά και τις μεθόδους εκτίμησης, να μάθει να μοντελοποιεί πραγματικές καταστάσεις φτιάχνοντας ρεαλιστικά μοντέλο και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις.

**Debate:** Βασίζεται στις παρατηρήσεις που έχουν αναφερθεί στις λύσεις των ερωτημάτων. Η ανοιχτή φύση του προβλήματος σημαίνει ότι οι μαθητές θα έχουν διαφορετικές λύσεις ανάλογα με τα στοιχεία που θα έχουν αντλήσει για το σπίτι τους. Οι μαθητές που ενδεχομένως έχουν συνηθίσει σε προβλήματα με μοναδική λύση ενδέχεται να βρουν την ύπαρξη διαφορετικών λύσεων προβληματική. Επιπλέον το τελευταίο ερώτημα ζητάει την άποψη των μαθητών και αυτή διαφέρει από μαθητή σε μαθητή. Τέλος το πρόβλημα έχει υποθέσει ορισμένες απλοποιήσεις που οδηγούν τους μαθητές σε διαφωνία για το κατά πόσο επηρεάζουν το πραγματικό αποτέλεσμα.

## **Βιβλιογραφία:**

- Σημειώσεις από το μάθημα της μαθηματικοποίησης Χ.Τριανταφύλλου.
- <https://www.eshops.gr/%CF%84%CE%B9%CE%BC%CE%B7/%CF%86%CF%89%CF%84%CE%BF%CE%B2%CE%BF%CE%BB%CF%84%CE%B1%CE%B9%CE%BA%CF%8C-%CF%80%CE%AC%CE%BD%CE%B5%CE%BB-v-tac-11354-545w-%CE%BC%CE%BF%CE%BD%CE%BF%CE%BA%CF%81%CF%85%CF%83%CF%84%CE%B1%CE%BB%CE%BB%CE%B9/>
- [https://www.enfsolar.com/pv/panel-datasheet/crystalline/49958?utm\\_source=ENF&utm\\_medium=highlight&utm\\_campaign=enquiry\\_homepage&utm\\_content=92682](https://www.enfsolar.com/pv/panel-datasheet/crystalline/49958?utm_source=ENF&utm_medium=highlight&utm_campaign=enquiry_homepage&utm_content=92682)
- <https://ae-solar.com/read-solar-panel-datasheet/>
- <https://www.altestore.com/blog/2016/04/how-do-i-read-specifications-of-my-solar-panel/>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Air\\_mass\\_\(solar\\_energy\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_(solar_energy))
- <https://www.forbes.com/home-improvement/solar/how-much-power-does-a-solar-panel-produce/>
- <https://blog.ecoflow.com/us/how-to-calculate-solar-panel-output/>
- <https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A6%CF%89%CF%84%CE%BF%CE%B2%CE%BF%CE%BB%CF%84%CE%B1%CF%8A%CE%BA%CE%AC>
- [http://oceanis.lib.puas.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/2409/log\\_201400093.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://oceanis.lib.puas.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/2409/log_201400093.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- <https://www.gov.gr/ipiresies/polites-kai-kathemerinoteta/periballon-kai-poioteta-zoes/photoboltaika-ste-stege>
- <https://glossologe.in.blogspot.com/2010/10/blog-post.html>
- Βιβλίο Φυσικής Γ' Γυμνασίου